



Aalborg Universitet

**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

## Supplerende Noter til Hydraulik

Brorsen, Michael

*Publication date:*  
1993

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Brorsen, M. (1993). *Supplerende Noter til Hydraulik*. Institut for Vand, Jord og Miljøteknik, Aalborg Universitet.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Aalborg Universitet

**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

## Supplerende Noter til Hydraulik

Brorsen, Michael

*Publication date:*  
1993

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Brorsen, M. (1993). Supplerende Noter til Hydraulik. Aalborg: Institut for Vand, Jord og Miljøteknik, Aalborg Universitet.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

34,50

# **SUPPLERENDE NOTER TIL HYDRAULIK**

**Michael Brorsen**

**August 1993  
Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning  
Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik  
AUC, Sohngaardsholmsvej 57, 9000 Aalborg**

## Indholdsfortegnelse

- 1 Energiligningen
  - 2 Impulsligningen
  - 3 Hydraulisk tryklinie og energiniveau
- Modellove
- Dimensionsanalyse

# 1 Energiligningen

Energiligningen for virkelige væsker er principielt opbygget ligesom Bernoullis ligning for ideale væsker, hvor sidstnævnte ligning blot udtrykker, at summen af potentiel-, tryk- samt kinetisk energi er konstant for en væskepartikel, når denne bevæger sig langs en strømlinie i en *stationær* strømning.

Da forskydningsspændingerne i en virkelig væske bevirker, at noget af den mekaniske energi omsættes til varmeenergi (dissipation), må der tages hensyn til dette, når der opstilles regnskab for partiklernes energi.

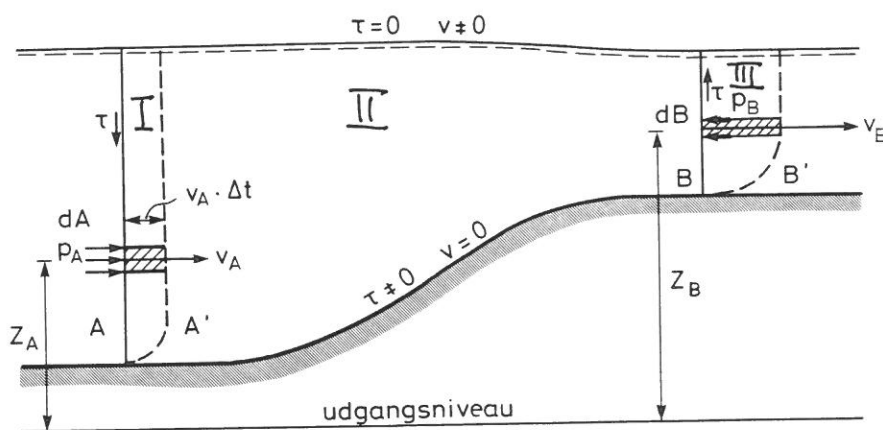
I det følgende benyttes følgende forudsætninger:

1. Energisætningen for en væske lyder:

$$A_{ydre} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{varme} \quad (1)$$

2. Stationær strømning, dvs. strømlinier ligger fast
3. Usammentrykkelig væske
4. Der betragtes enten laminær strømning eller hovedbevægelsen i turbulent strømning.

Vi betragter et strømrør mellem to snit betegnet henholdsvis *A* og *B*. Se fig. 1.



Figur 1:

Som i Bo Pedersens "Hydraulik for bygningsingeniører" betegnes arealerne af disse snit ligeledes *A* og *B*, medens vi her vil betegne strømrørets areal mellem de to snit med *F*. Som sædvanlig er lokal hastighed betegnet med *v* og middelhastighed med *V*.

I løbet af tidsrummet  $\Delta t$  flytter væskelegemet sig, således at partikler i snit  $A$  flyttes hen i fladen  $A'$  og i snit  $B$  flyttes partiklerne hen i fladen  $B'$ . Under denne flytning udfører de ydre kræfter et arbejde på væskelegemet.

De ydre kræfter består af trykkræfter, forskydningskræfter samt tyngdekraften.

Da arbejde jo er kraft gange flytningen i kraftens retning ses, at trykkræfterne kun udfører et arbejde i snit  $A$  og  $B$ , som samlet er:

$$A_{\text{trykkræfter}} = \int_A p_A dA v_A \Delta t - \int_B p_B dB v_B \Delta t \quad (2)$$

Det er her forudsat, at snittene overalt er vinkelret på den lokale hastighed. Dette medfører igen, at snittene bliver krumme, hvis der ikke er parallelle strømmlinier.

Det arbejde, forskydningskræfterne udfører på legemets totale overflade,  $A + B + F$ , kan principielt udtrykkes som

$$A_{\text{forskydningskræfter}} = \int_A \vec{\tau} dA \cdot \vec{v}_A \Delta t + \int_B \vec{\tau} dB \cdot \vec{v}_B \Delta t + \int_F \vec{\tau} dF \cdot \vec{v} \Delta t \quad (3)$$

hvor  $\vec{\tau}$  og  $\vec{v}$  betegner henholdsvis forskydningsspændingsvektor og hastighedsvektor. Imidlertid er

$$A_{\text{forskydningskræfter}} = 0 \quad (4)$$

hvilket kan indses således:

1. på en fast overflade er  $v = 0$
2. på en fri overflade er  $\tau = 0$  (med mindre der er kraftig vind)
3. i snit  $A$  og  $B$  står  $\vec{\tau}$  og  $\vec{v}$  vinkelret på hinanden, således at  $\vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0$ .

Normalt findes tyngdekraftens arbejde som

$$A_{\text{tyngdekraft}} = \sum -mg(z_{\text{slut}} - z_{\text{start}}) = \sum mg z_{\text{start}} - \sum mg z_{\text{slut}} \quad (5)$$

hvor summationen skal udstrækkes over alle de partikler legemet udgøres af.

Betragter man fig. 1, indses, at summationen kan begrænses til områderne begrænset af  $A$  og  $A'$  samt af  $B$  og  $B'$ .

Dette skyldes selvfølgelig, at summen over området begrænset af  $A'$  og  $B$  har samme værdi før og efter flytningen.

Benyttes (5) på områderne  $AA'$  og  $BB'$  findes:

$$\begin{aligned} A_{\text{tyngdekraft}} &= \sum m g z_A - \sum m g z_b \\ &= \int_A (\rho v_A \Delta t dA) g z_A - \int_B (\rho v_B \Delta t dB) g z_B \\ &= \Delta t \left[ \int_A \gamma z_A v_A dA - \int_B \gamma z_B v_B dB \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Da den kinetiske energi i området  $A'$  til  $B$  er konstant, findes ændringen i væskelegemets kinetiske energi i løbet af  $\Delta t$  af:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{kin}} &= \left( \sum \frac{1}{2} m v^2 \right)_{\text{efter}} - \left( \sum \frac{1}{2} m v^2 \right)_{\text{før}} \\ &= (\Delta E_{\text{kin}, II})_{\text{efter}} + \Delta E_{\text{kin}, III} - ((\Delta E_{\text{kin}, II})_{\text{før}} + \Delta E_{\text{kin}, I}) \\ &= \Delta E_{\text{kin}, III} - \Delta E_{\text{kin}, I} \\ &= \int_B \frac{1}{2} (\rho v_B \Delta t dB) v_B^2 - \int_A \frac{1}{2} (\rho v_A \Delta t dA) v_A^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Energisætningen for væskelegemet (1):

$$A_{\text{ydre}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{varme}}$$

omskrives først til

$$\Delta E_{\text{varme}} = A_{\text{ydre}} - \Delta E_{\text{kin}} \quad (8)$$

Indsættes derefter (2), (4), (6) og (7) i (8) findes:

$$\Delta E_{\text{varme}} = \Delta t \left[ \int_A (\gamma z_A + p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2) v_A dA - \int_B (\gamma z_B + p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2) v_B dB \right] \quad (9)$$

Her viser det sig bekvemt at indføre betegnelsen  $W_{\text{varme}}$  for den mængde mekanisk energi, som pr. tidsenhed omdannes til varmeenergi. Enheden for denne størrelse er:  $\text{Joule/sek} = \text{Watt}$ .

Hermed kan  $\Delta E_{\text{varme}}$  udtrykkes som:

$$\Delta E_{\text{varme}} = W_{\text{varme}} \cdot \Delta t \quad (10)$$

Indsættes ligning (10) i ligning (9) og divideres sidstnævnte på begge sider med  $\Delta t$  findes:

$$W_{varme} = \int_A (\gamma z_A + p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2) v_A dA - \int_B (\gamma z_B + p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2) v_B dB \quad (11)$$

Divideres denne ligning med  $\gamma$  findes endelig:

$$\begin{aligned} \frac{W_{varme}}{\gamma} &= \int_A (z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g}) v_A dA - \int_B (z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}) v_B dB \\ &= \int_A (z_A + \frac{p_A}{\gamma}) v_A dA + \int_A \frac{v_A^3}{2g} dA - \int_B (z_B + \frac{p_B}{\gamma}) v_B dB - \int_B \frac{v_B^3}{2g} dB \end{aligned} \quad (12)$$

Ligning (12) kan kun benyttes i praksis, hvis der anvises nogle nemme metoder til at løse fladeintegralerne.

Det har heldigvis vist sig i praksis, at koefficienten

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{V^3 A}$$

varierer bemærkelsesværdigt lidt. Typiske værdier er

$$\alpha = 1,00 \quad , \quad \text{hvis hastigheden er helt jævnt fordelt over snittet}$$

$$\alpha = 1,10 \quad , \quad \text{hvis snittet ligger i en turbulent strømning i f.eks. rør eller kanaler.}$$

Man nøjes derfor normalt med at skønne værdien af  $\alpha$ , som i øvrigt betegnes *hastighedsfordelingskoefficienten*.

Hermed kan ligning (12) omskrives til:

$$\frac{W_{varme}}{\gamma} = \int_A (z_A + \frac{p_A}{\gamma}) v_A dA + \frac{\alpha_A V_A^3 A}{2g} - \int_B (z_B + \frac{p_B}{\gamma}) v_B dB - \frac{\alpha_B V_B^3 B}{2g} \quad (13)$$

De andre fladeintegraler kræver kendskab til trykvariationen over snitfladen.

Denne variation er kun kendt i enkelte tilfælde.

Et af tilfældene er snit med *tilnærmet parallelle strømlinier* (ensformig strømning).

Her vides, at trykfordelingen er retlinet i et snit vinkelret på strømningen. Det medfører igen, at

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{konstant} \quad (14)$$

over hele snittet, hvorfor der også tales om *hydrostatisk trykfordeling*.



Bemærk dog, at konstanten har forskellige værdier i forskellige tværsnit.

Indføres kontinuitetsligning

$$Q = \int_A v_A dA = V_A \cdot A = \int_B v_B dB = V_B \cdot B \quad (15)$$

samt ligning (14) i ligning (13) findes:

$$\begin{aligned} \frac{W_{varme}}{\gamma} &= (z + \frac{p}{\gamma})_A \int_A v_A dA + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} Q - (z + \frac{p}{\gamma})_B \int_B v_B dB - \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} Q \\ &= (z + \frac{p}{\gamma})_A \cdot Q + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} Q - (z + \frac{p}{\gamma})_B \cdot Q - \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} Q \end{aligned} \quad (16)$$

Ved division med  $Q$  findes endelig:

$$\frac{W_{varme}}{\gamma Q} = (z + \frac{p}{\gamma})_A + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} - (z + \frac{p}{\gamma})_B - \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} \quad (17)$$

eller

$$(z + \frac{p}{\gamma})_A + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} = (z + \frac{p}{\gamma})_B + \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} + \frac{W_{varme}}{\gamma Q} \quad (18)$$

Her er  $W_{varme}$  den samlede mængde energi, der pr. tidsenhed omdannes fra umiddelbar anvendelig mekanisk energi til varmeenergi, og  $\gamma Q$  er vægten (i  $N$ ) af den væske, der resulterende flyttes fra snit  $A$  til snit  $B$  pr. tidsenhed.

Man kan derfor fortolke  $W_{varme}/(\gamma Q)$  som tabet af mekanisk energi pr. vægtenhed ( $N$ ) af væsken, når denne strømmer fra snit  $A$  til snit  $B$ . Dette tab betegnes normalt med  $\Delta H_{AB}$ , dvs.

$$\Delta H_{AB} = \frac{W_{varme}}{\gamma Q} \quad \text{enhed: } \frac{Nm s^{-1}}{Nm^{-3} \cdot m^3 s^{-1}} = m \quad (19)$$

eller

$$W_{varme} = \gamma Q \Delta H_{AB} \quad \text{enhed: } Watt \quad (20)$$

Færdige formler til bestemmelse af  $\Delta H_{AB}$  kan ikke gives umiddelbart.

Faktisk er det sådan, at rørhydraulikken primært går ud på at fastlægge, hvorledes  $\Delta H_{AB}$  afhænger af rørgeometri og vandføring.

Indføres (19) i (18) fås den ligning, som normalt betegnes:

*Energiligningen:*

$$(z + \frac{p}{\gamma})_A + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} = (z + \frac{p}{\gamma})_B + \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} + \Delta H_{AB} \quad (21)$$

BEMÆRK: Denne version af energiligningen gælder *kun*, hvis både snit *A* og snit *B* lægges vinkelret på strømlinierne i snit med parallelle strømlinier.

Fladeintegralet i ligning (13) kan også nemt løses, hvis et snit lægges vinkelret på en fri stråle. Se Bo Pedersens "Hydraulik for bygningsingeniører".

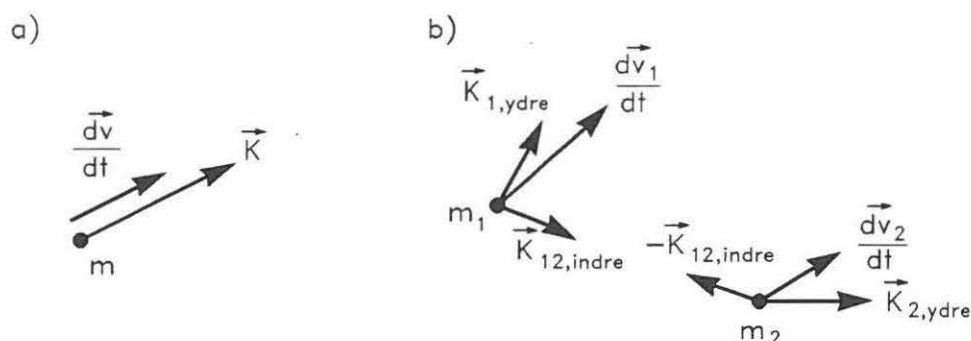
## 2 Impulsligningen

Energiligningen giver en sammenhæng mellem trykniveau og hastighed i 2 snit. I ligningen indgår det ukendte energitab  $\Delta H$ . I visse tilfælde kan man etablere en uafhængig ligning, hvor de samme parametre indgår. Denne ligning betegnes *impulsligningen*. Kombineres energiligningen og impulsligningen kan  $\Delta H$  beregnes.

Følgende hovedtilfælde er af interesse:

1. Konvergerende strømmlinier, hvor  $\Delta H \sim 0$ , når afstanden mellem snittene ikke er for stor.
2. Divergerende strømmlinier, hvor  $\Delta H > 0$ .
3. Rørstrømninger, hvor  $\Delta H > 0$ .  $\Delta H$  kan beregnes ved semiempiriske metoder. Dette behandles i rørhydraulikken.

Det er således i tilfælde 2, at man med fordel kan benytte impulsligningen til beregning af  $\Delta H$ . Divergerende strømmlinier betyder, at strømningshastigheden falder i strømretningen. Ifølge Bernoullis ligning stiger trykket dermed i strømretningen. Energitalet skyldes da hvirveldannelse i forbindelse med separation i grænselagene.



Figur 2: Newton's 2. lov.  
 a) Massepartikel. b) Partikelsystem.

Newton's 2. lov for massepartiklen på fig. 2a giver

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{K} \Leftrightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{K} \\
 \Leftrightarrow d\vec{B} &= \vec{K} dt
 \end{aligned} \tag{22}$$

idet

$$\vec{B} = m\vec{v} \quad (23)$$

betegnes partiklens *bevægelsesmængde*.

Newton's 2. lov opstilles herefter for alle partikler i et partikelsystem. Adderes ligningerne findes

$$\sum m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{K} = \vec{K}_{1,ydre} + \vec{K}_{12} + (-\vec{K}_{12}) + \vec{K}_{2,ydre} = \sum \vec{K}_{ydre} \quad (24)$$

Ifølge loven om aktion og reaktion er de indre kræfter mellem 2 partikler lige store og modsat rettede, se figur 2b. De indre kræfter summeres derfor parvis ud, hvorefter kun de ydre kræfter på partiklerne bliver tilbage.

Da partikelsystemets bevægelsesmængde er

$$\vec{B} = \sum m\vec{v} \quad (25a)$$

haves

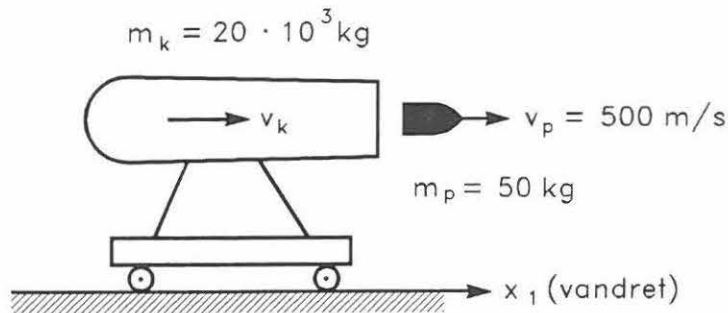
$$d\vec{B} = d\left(\sum m\vec{v}\right) = \sum m d\vec{v} \quad (25b)$$

hvorefter (24) kan skrives

$$d\vec{B} = \left(\sum \vec{K}_{ydre}\right) dt \quad (26)$$

(26) benævnes *impulsligningen for et partikelsystem*.

### Eksempel 1: Rekyl af kanon.



Figur 3: Rekylhastighed af kanon.

Rekylhastigheden af kanonen på figur 3 ønskes beregnet. Impulsligningen for et partikelsystem (26) benyttes i  $x_1$ -retningen

$$dB_1 = \left( \sum K_{1,ydre} \right) dt \quad (27)$$

hvor

$$dB_1 = (B_1)_{\text{efter}} - (B_1)_{\text{før}} \quad (28)$$

Af ligning (27) ses, at da  $\sum K_{1,ydre} = 0 \Rightarrow dB_1 = 0$ .

Herefter giver ligning (28) at

$$(B_1)_{\text{efter}} = (B_1)_{\text{før}}$$

Da  $(B_1)_{\text{før}} = 0$  og

$$(B_1)_{\text{efter}} = m_k v_k + v_p m_p$$

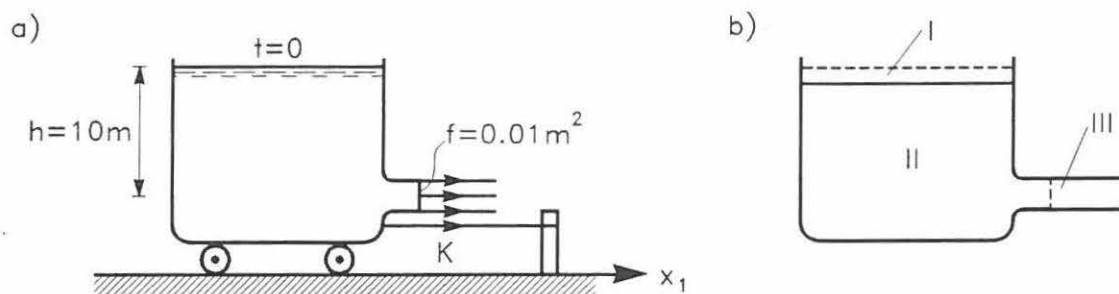
findes derfor

$$\begin{aligned} m_k v_k + v_p m_p &= 0 \Leftrightarrow \\ v_k &= -\frac{m_p}{m_k} v_p \end{aligned} \quad (29)$$

$v_k < 0$ , hvorfor kanonen bevæger sig i  $x_1$ -aksens negative retning. Af (29) findes med de på figur 3 anførte data

$$v_k = -\frac{50}{20 \cdot 10^3} \cdot 500 = \underline{\underline{-1.25 \text{ m/s}}}$$

## Eksempel 2: Impulsdrevet køretøj



Figur 4: Impulsdrevet køretøj.

a) Data for system. b) Ændring af partikelsystem i tidsrum  $dt$ .

Kraften  $K$  i det på figur 4a viste tov hindrer køretøjet i at bevæge sig.

Strømningen kan antages stationær i det differentielle tidsrum  $dt$ . Endvidere antages væsken usammentrykkelig.

I løbet af tidsintervallet  $dt$  sker der en differentiell sænkning af overfladen, idet væskevolumenet  $f v dt$  er strømmet ud af tuden. Tudens tværsnitsareal er  $f = 0.01\text{ m}^2$ .

Pga. stationariteten og usammentrykkeligheden er bevægelsesmængden uændret før og efter tidsintervallet i område II på figur 4b.

Impulsligningen for et partikelsystem i  $x_1$ -retningen giver

$$dB_1 = K dt \quad (30)$$

hvor

$$\begin{aligned} dB_1 &= (B_1)_{\text{efter}} - (B_1)_{\text{før}} \\ &= B_{1,II} + B_{1,III} - (B_{1,I} + B_{1,II}) = B_{1,III} - B_{1,I} \\ &= \rho v^2 dt f \end{aligned} \quad (31)$$

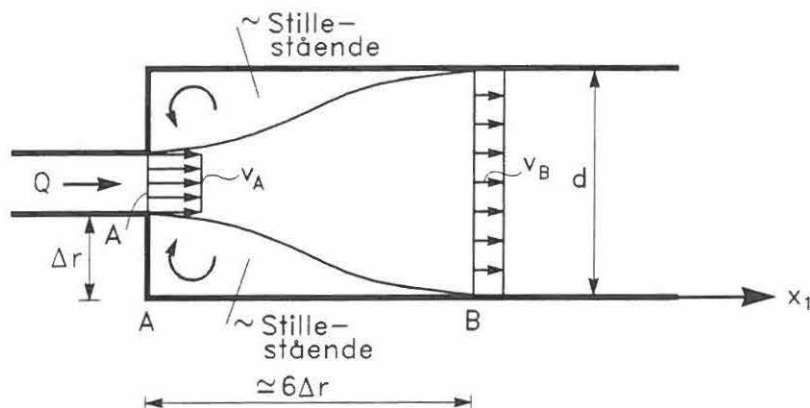
Af (30) og (31) følger herved

$$K = \rho v^2 f \quad (32)$$

Da  $v \simeq \sqrt{2gh}$  ifølge Toricellis sætning, findes

$$K \simeq 2\rho ghf = 2 \cdot 10^3 \cdot 9.82 \cdot 10 \cdot 0.01 = \underline{1964\text{ N}}$$

### Eksempel 3: Brat rørudvidelse



Figur 5: Brat rørudvidelse.

Vandet løber gennem et rør med tværsnitsarealet  $A$ , der brat udvides til et rør med tværsnitsarealet  $B$ . Udvidelsen giver anledning til voldsomme hvirvler og turbulens i skillefladen mellem strømmende og stillestående væske. En betydelig del af den mekaniske energi omsættes herved til varme.

I det store rør bliver strømmingen ensformig ca.  $6 \cdot \Delta r$  efter udvidelsen. Snit  $B$  placeres på dette sted. Snit  $A$  placeres ved rørudvidelsen, men i det store rør, se figur 5.

$p_A$  og  $p_B$  angiver trykkene i røraksen ved snit  $A$  og snit  $B$ .

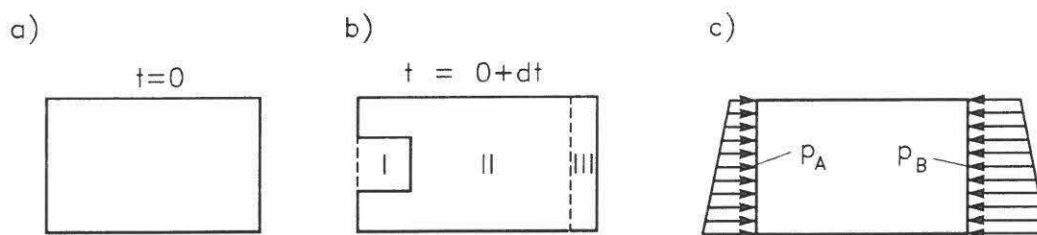
I det følgende ønsker vi at beregne trykstigningen  $\Delta p = p_B - p_A$  fra snit  $A$  til snit  $B$ .

Da strømlinierne divergerer, vil man umiddelbart forvente, at trykket stiger i strømretningen.

Røraksen antages vandret. Strømningshastigheden  $v_A$  i tilløbsrøret og  $v_B$  ved snit  $B$  antages jævnt fordelt over rørtværsnittene. Strømmingen antages stationær og usammentrykkelig mellem snit  $A$  og snit  $B$ .

Impulsligningen for et partikelsystem i  $x_1$ -retningen giver

$$dB_1 = \left( \sum K_{1,ydre} \right) dt \quad (33)$$



Figur 6: a) Partikelsystem til tidspunkt  $t = 0$ .  
 b) Partikelsystem til tidspunkt  $t = 0 + dt$ .  
 c) Hydrostatisk tryk på snitflader  $A$  og  $B$ .

Figur 6a viser det ved snittene  $A$  og  $B$  afgrænsede partikelsystem til tiden  $t = 0$ . Konfigurationen af dette partikelsystem til tiden  $t = 0 + dt$  er vist på figur 6b. Massen og hastigheden i område II er ens før og efter tidsintervallet  $dt$ . Bevægelsesmængden i  $x_1$ -retningen er dermed uændret i dette område. Herved haves i  $x_1$ -retningen

$$\begin{aligned}
 dB_1 &= (B_1)_{\text{efter}} - (B_1)_{\text{før}} \\
 &= B_{1,II} + B_{1,III} - (B_{1,I} + B_{1,II}) \\
 &= B_{1,III} - B_{1,I} \\
 &= (\rho v_B dt B) v_B - (\rho v_A dt A) v_A
 \end{aligned} \tag{34}$$

Af ydre kræfter på det fritsnittede væskevolumen i  $x_1$ -retningen virker trykkræfter på endesnittene. På væskevolumenets krumme overflade virker vægforskydnings-spændinger i  $x_1$ -aksens negative retning. Disse ignoreres, da de er små. Da røret er forudsat vandret, har tyngdekraften ingen komponent i  $x_1$ -retningen.

I snit  $A$  og snit  $B$  er der hydrostatisk tryk. Det bemærkes, at i snit  $A$  virker trykket over *hele* tværsnittet, også hvor væsken er næsten stillestående. Herved haves

$$\sum K_{1,ydre} = \int_A p dA - \int_B p dB = p_A \cdot B - p_B \cdot B \tag{35}$$

hvor  $p_A$  og  $p_B$  er trykkene i de respektive snits geometriske tyngdepunkter.

Vi har her benyttet, at trykkraften på en flade, hvor der hersker hydrostatisk tryk, er lig trykket i fladens geometriske tyngdepunkt ganget med fladens tværsnitsareal.



Ved indsætning af (34) og (35) i (33) findes efter division med  $dt$

$$(\rho v_B^2 B - \rho v_A^2 A) = (p_A B - p_B B) \Rightarrow \quad (36)$$

$$\Delta p = p_B - p_A = \rho v_A^2 \frac{A}{B} - \rho v_B^2 \frac{B}{B} = \frac{\rho Q^2}{B} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \quad (37)$$

Kontinuitetsligningen  $Q = v_A A = v_B B$  er her benyttet. Da  $A < B$  følger af (37), at  $\Delta p > 0$ , som forventet.

$\Delta H_{AB}$  kan nu beregnes af energiligningen:

$$\left( z + \frac{p}{\gamma} \right)_A + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} = \left( z + \frac{p}{\gamma} \right)_B + \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} + \Delta H_{AB} \quad (38)$$

Da hastighederne regnes jævnt fordelt i begge snit haves  $\alpha_A = \alpha_B = 1$  samt  $v_A = V_A$  og  $v_B = V_B$ . Endvidere er  $z_A = z_B$ , når trykniveauerne beregnes i røraksen.

Ligning (38) skrives derfor om til

$$\Delta H_{AB} = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} - \left( \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} \right) = \frac{v_A^2 - v_B^2}{2g} - \frac{\Delta p}{\gamma} \quad (39)$$

Indføres i (36) betegnelserne

$$I_A = \rho v_A^2 A \quad (40)$$

$$I_B = \rho v_B^2 B \quad (41)$$

$$P_A = p_A \cdot B \quad (42)$$

$$P_B = p_B \cdot B \quad (43)$$

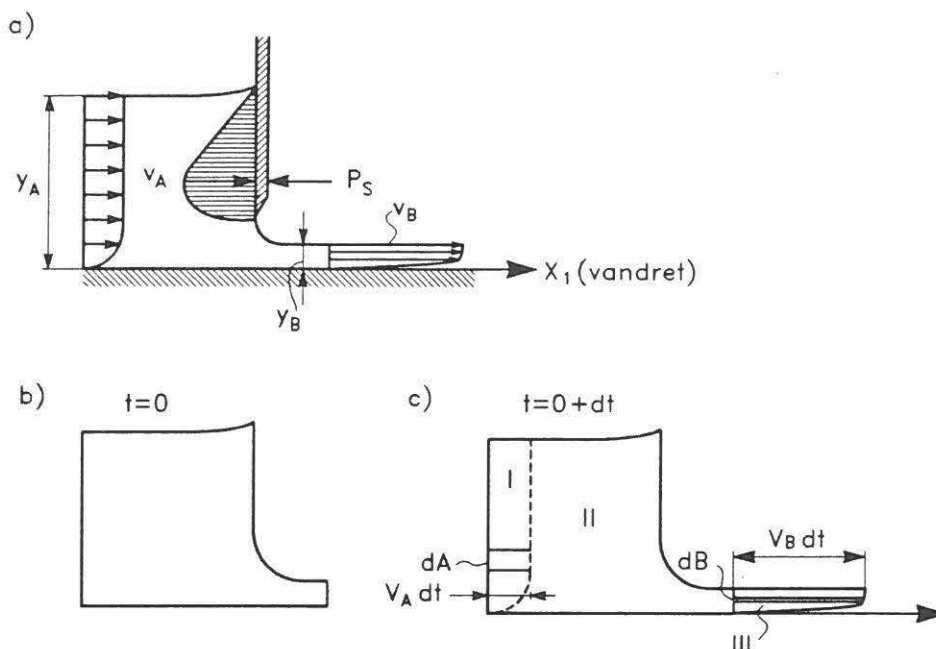
findes

$$P_A + I_A = P_B + I_B \quad (44)$$

$I_A$  og  $I_B$  har enheden kraft og kaldes *impulskræfter*. Formelt kan (36) derfor opfattes som en *kraftligevægtsligning*.

#### Eksempel 4: Trykkraft på stignord

Figur 7 viser en plan strømning under et stignord. Vi betragter en længdeenhed af strømmingen og stignordet vinkelret på tegneplanen og ønsker at beregne resultanten  $P_s$  af væsketrykket på den pågældende enhedslængde af stignordet.



Figur 7: Strømning under stignord.

a) Definition af parametre. b) Partikelsystem til tidspunkt  $t = 0$ .

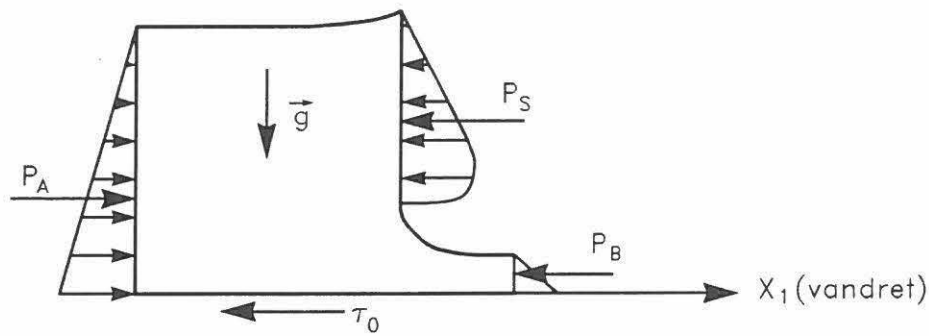
Ved beregningen tages i dette tilfælde hensyn til de aktuelle hastighedsfordelinger i snit A og B.

Bunden af stignordet antages vandret. Strømningen mellem snit A og snit B antages stationær og væsken antages usammentrykkelig.

Figur 7a viser det ved snittene A og B afgrænsede partikelsystem til tiden  $t = 0$ . Konfigurationen af partikelsystemet til tiden  $t = 0 + dt$  er vist på figur 7b. Massen og hastigheden i det skraverede areal er ens før og efter tidsintervallet  $dt$ . Bevægelsesmængden af det skraverede areal er dermed uændret. Herved gives i  $x$ -retningen

$$dB_1 = (B_1)_{\text{efter}} - (B_1)_{\text{før}} = \int_B (\rho v_B dt dB) v_B - \int_A (\rho v_A dt dA) v_A \Rightarrow$$

$$dB_1 = \left( \int_B \rho v_B^2 dB - \int_A \rho v_A^2 dA \right) dt \quad (45)$$



Figur 8: Ydre kræfter på partikelsystem.

Af ydre kræfter på partikelsystemet virker trykkræfter på endtværsnittene  $A$  og  $B$  og trykkraften fra stigbordet. Langs bunden virker bundforskydningsspændingen  $\tau_0$ . Denne ignoreres. Da bunden er forudsat vandret, har tyngdekraften ingen komponent i  $x_1$ -retningen.

Resultanten af trykkræfterne fra stigbordet på partikelsystemet betegnes  $P_s$ . Denne virker i  $x_1$ -aksens negative retning, se figur 7.

I snittene  $A$  og  $B$  er strømlinierne parallelle, svarende til at trykkene er hydrostatisk fordelt. Resultanten af trykkræfterne benævnes  $P_A$  og  $P_B$ . Vi har nu

$$\begin{aligned}\sum K_{1,ydre} &= P_A - P_B - P_s \\ &= \frac{1}{2}\gamma y_A^2 - \frac{1}{2}\gamma y_B^2 - P_s\end{aligned}\quad (46)$$

hvor  $y_A$  og  $y_B$  er vanddybden ved snit  $A$  og snit  $B$ . Vi har her benyttet, at resultanten pr. længdeenhed af en hydrostatisk trykfordeling er lig  $\frac{1}{2}\gamma y^2$ , hvor  $\gamma$  er specifikke tyngde.

Impulsligningen i  $x_1$ -retningen for et partikelsystem giver nu

$$\left( \int_B \rho v_B^2 dB - \int_A \rho v_A^2 dA \right) dt = \left( \frac{1}{2}\gamma y_A^2 - \frac{1}{2}\gamma y_B^2 - P_s \right) dt$$

eller

$$P_s = \frac{1}{2}\gamma y_A^2 - \frac{1}{2}\gamma y_B^2 - \int_B \rho v_B^2 dB + \int_A \rho v_A^2 dA \quad (47)$$

I (47) indgår integraler af typen  $\int_F v^2 dF$ . Disse kan beregnes, hvis fordelingen af  $v$  over fladen  $F$  er kendt. Dette er i reglen ikke tilfældet.

Man indfører derfor en hastighedsfordelingskoefficient  $\alpha'$  analog til hastighedsfordelingskoefficienten  $\alpha$  i energiligningen. I dette tilfælde er koefficienten  $\alpha'$  defineret som

$$\alpha' = \frac{\int_V v^2 dF}{V^2 F} \quad , \quad (48)$$

hvor  $V = \frac{1}{F} \int_F v dF$  er middelhastigheden og  $F$  er fladens areal. Forsøg viser, at  $1.00 < \alpha' < 1.05$ .

Det kan endvidere vises, at sammenhængen mellem  $\alpha$  og  $\alpha'$  med god tilnærmelse er

$$\alpha' \simeq 1 + \frac{\alpha - 1}{3}$$

Indsættes (48) i (47) findes:

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{2} \gamma (y_A^2 - y_B^2) - \rho \alpha'_B V_B^2 y_B l + \rho \alpha'_A V_A^2 y_A l \\ &= \frac{1}{2} \gamma (y_A^2 - y_B^2) + \rho q^2 \left( \frac{\alpha'_A}{y_A} - \frac{\alpha'_B}{y_B} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

idet kontinuitetsligningen  $q = V_A \cdot y_A = V_B \cdot y_B$  er benyttet.

(47) kan igen formelt opfattes som en kraftligevægtsligning

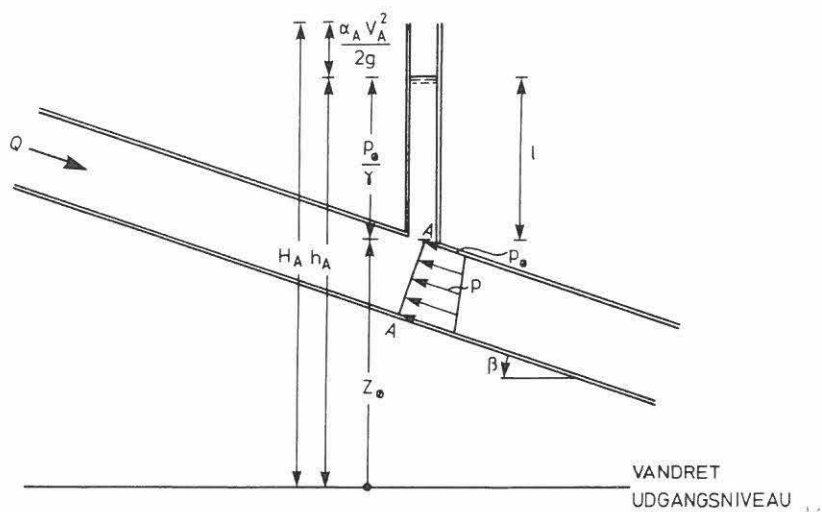
$$P_B + I_B = P_A + I_A - P_s \quad (50)$$

hvor impulskraften defineres ved  $I = \rho \int_F v^2 dF = \rho \alpha' V^2 F$ .

### 3 Hydraulisk tryklinie og energiniveau

Anvendes energiligningen på en rørstrømning mellem snittene  $A$  og  $B$ , i hvilke der hersker *hydrostatisk tryk*, findes

$$\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_A + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_B + \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} + \Delta H_{AB} \quad (51)$$



Figur 9: Stigrør i trykledning (fuldtløbende rør).

Størrelsen

$$h = z + \frac{p}{\gamma} \quad (52)$$

betegnes *trykniveauet*. Det er tidligere vist, at denne størrelse er konstant i alle punkter af et snit vinkelret på strømlinierne (og kun i dette snit). Denne egenskab er karakteristisk for hydrostatisk trykfordeling.

Fysisk kan  $h$  fortolkes som højden fra udgangsniveauet til vandspejlet i et stigrør placeret ved snit  $A$  (se fig. 9). Dette ses på følgende måde:

(52) gælder også for trykket  $p_\theta$  i oversiden af snit  $A$ , i.e.

$$h_A = z_\theta + \frac{p_\theta}{\gamma} \quad (53)$$

hvor  $z_\theta$  er den geometriske højde til oversiden af snit  $A$ .

$$p_{\emptyset} = \gamma \ell \quad (54)$$

Indføres (54) i (53) findes  $h_A = z_0 + \ell$  q. e. d.

Størrelsen  $\frac{\alpha V^2}{2g}$  i (51) betegnes *hastighedshøjden*. Afsættes denne lodret over trykniveauet, findes det såkaldte *energiniveau*

$$H = (z + \frac{p}{\gamma}) + \frac{\alpha V^2}{2q} \quad (55)$$

The diagram shows a pipe on an inclined plane with a downward slope angle  $\beta$ . The horizontal axis is labeled  $x$ . Two vertical manometer tubes are connected to the pipe at points A and B. The vertical distance from the horizontal reference line (VANDRET UDGANGSNIVEAU) to the center of the pipe at A is  $h_A$ , and at B it is  $h_B$ . The hydraulic grade line (ENERGILINIE) is a dashed line representing the total head, with the head loss between A and B labeled as  $\frac{\alpha_A V_A^2}{2g}$  and  $\frac{\alpha_B V_B^2}{2g}$ . The piezometric head line (TRYKLINIE) is a solid line representing the static head, which is parallel to the pipe axis. The difference between the two lines is the velocity head.

Linien gennem trykniveauerne betegnes tilsvarende *tryklinien*.

$$H_A = H_B + \Delta H_{AB} \quad , \quad \text{hvor} \quad \Delta H_{AB} > 0 \quad (56)$$

$\Delta H_{AB}$  kan således fortolkes som faldet på energilinen mellem snit  $A$  og snit  $B$ .

Pr. definition haves

$$I = -\frac{dH}{dx} \quad (57)$$

hvor  $I$  betegnes *energiliniens gradient*, og  $x$  er en koordinat langs røraksen, positiv i strømretningen. Minustegnet i (57) skyldes, at vi pr. tradition ønsker, at  $I > 0$ . Da  $H$  altid aftager i strømretningen er  $\frac{dH}{dx} < 0$ .

Er rørstrømningen ensformig over en længere rørstrækning, må vi få samme fald  $\Delta H$  over lige lange længder,  $L$ , uanset hvor på røret, det første af de 2 snit placeres. Man kan i dette tilfælde beregne energitabet pr. længdeenhed af røret som

$$I = -\frac{\Delta H}{L} = \frac{\Delta H}{L} \quad (58)$$

Størrelsen  $-\frac{dh}{dx}$  betegnes *trykliniens gradient*. Tryklinien kan godt lokalt stige (ved en rørudvidelse hvor middelhastigheden falder), hvorfor trykliniens gradient kan være såvel positiv som negativ. Energiliniens gradient er for ensformige rørstrømninger ifølge det foregående uafhængig af  $x$  (snittets placering).

Ved ensformige rørstrømninger er de 2 gradienter lige store, dvs. energilinie og tryklinie er parallelle.

# **MODELLOVE**

**Michael Brorsen**

**August 1993**  
**Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning**  
**Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik**  
**AUC, Sohngaardsholmsvej 57, 9000 Aalborg**



## Indholdsfortegnelse:

<b>Indledning</b> .....	3
<b>Krav til modelforsøg</b> .....	3
Geometrisk ligedannethed .....	4
Kinematisk ligedannethed .....	5
Dynamisk ligedannethed .....	6
<b>Krafttyper</b> .....	7
<b>Skalering af kræfter</b> .....	8
Kraftresultant .....	8
Tyngdekraft .....	9
Forskydningskraft, laminært bidrag .....	10
Forskydningskraft, turbulent bidrag .....	10
<b>Etablering af fuld dynamisk ligedannethed.</b> .....	11
<b>Etablering af tilnærmet dynamisk ligedannethed</b> .....	12
Froude's modellov .....	12
Eksempel 1 .....	14
Reynolds' modellov .....	15
Eksempel 2 .....	16

# Modellove

## Indledning

Løsningen af hydrauliske problemer kan kun sjældent baseres på en eksakt analytisk løsning af strømningssligningerne.

Selv om der i de seneste årtier er kommet stærkt forbedrede muligheder for en numerisk løsning af strømningssligningerne på computere, må man alligevel forbavsende ofte også inddrage resultater fra fysiske modelforsøg ved løsningen af et problem.

Det kan selvfølgelig altid lade sig gøre at løse et givet problem ved at prøve sig frem, dvs. opføre det påtænkte bygværk, og derefter undersøge om bygværket fungerer som planlagt. I de fleste tilfælde vil der imidlertid være noget, der ikke fungerer efter hensigten, og det er indlysende, at man ikke har råd til væsentlige fejltagelser, når bygværkerne er f. eks. havne, sluser og overløbsbygværker.

I praksis opfører man i stedet en kopi af bygværket i lille skala, i det følgende betegnet *modellen*. Bygværket i naturlig størrelse betegnes tilsvarende *naturen*.

I modellen er det nemmere og billigere at undersøge de nødvendige ændringer, man næsten altid må foretage inden en konstruktion er optimalt udformet og strømmingen forløber tilfredsstillende.

## Krav til modelforsøg

Det er ret indlysende, at man kun får noget ud af udførelsen af modelforsøg, hvis man på *entydig* måde kan omsætte erfaringerne fra modellen til naturen.

Da man typisk er interesseret i både strømmingens forløb ved bygværket og kræfterne fra væsken på bygværket, skal man derfor entydigt kunne omsætte *hastigheder* og *kræfter* (og dermed også trykkræfter) fra model til natur.

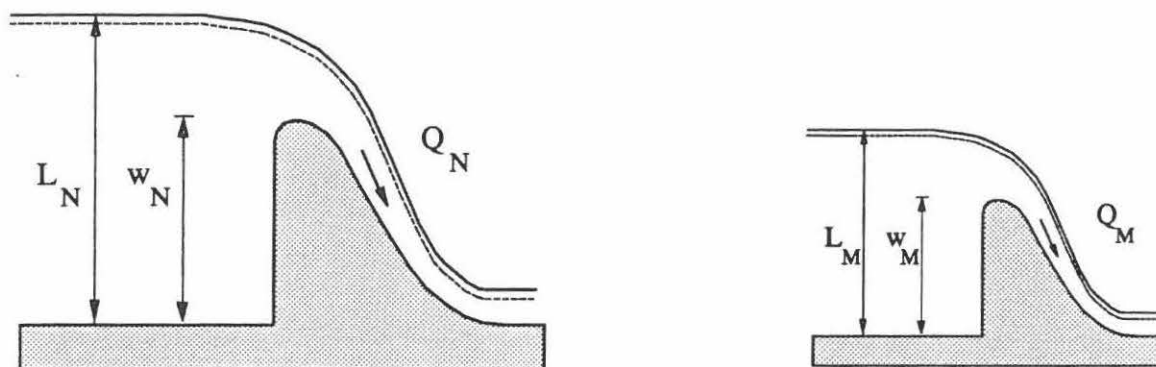
I praksis opnås dette ved at udføre modelforsøgene på en sådan måde, at tre slags lighedannethed eksisterer mellem model og natur:

- 1) geometrisk lighedannethed
- 2) kinematisk lighedannethed
- 3) dynamisk lighedannethed

I det følgende beskrives, hvad der menes med disse former for lighedannethed, samt hvilke krav der må stilles til udførelsen af forsøget for opnåelse af lighedannethed.

## Geometrisk lighedannethed

Det forekommer naturligt at udføre modellen som en geometrisk eksakt kopi af naturen. Heraf følger at forholdet mellem alle ensbeliggende længder i natur og model er ens. Dette forhold mellem længder betegnes *længdeskalaen*,  $\lambda_L$ .



Figur 1 Overløb i naturlig størrelse (NATUR) og model af overløb (MODEL).

Betragtes model og natur i figur 1 bevirker geometrisk lighedannethed derfor :

$$\lambda_L = \frac{L_N}{L_M} = \frac{w_N}{w_M} \quad (1)$$

Alle ensbeliggende arealer opfylder derfor ligningen

$$\lambda_A = \frac{A_N}{A_M} = \frac{c_A L_N^2}{c_A L_M^2} = \left(\frac{L_N}{L_M}\right)^2 = \lambda_L^2 \quad (2)$$

idet  $c_A$  er ens i model og natur p.g.a. den geometriske lighedannethed.

For alle ensbeliggende volumener findes på tilsvarende vis

$$\lambda_X = \frac{X_N}{X_M} = \frac{c_X L_N^3}{c_X L_M^3} = \left(\frac{L_N}{L_M}\right)^3 = \lambda_L^3 \quad (3)$$

hvor  $X$  betegner et volumen.

Det skal bemærkes, at geometrisk lighedannethed ikke altid er så let at etablere, som det umiddelbart ser ud til. For eksempel kan det være meget svært at genskabe den korrekte ruhed af en overflade i modellen.

## Kinematisk lighedannethed

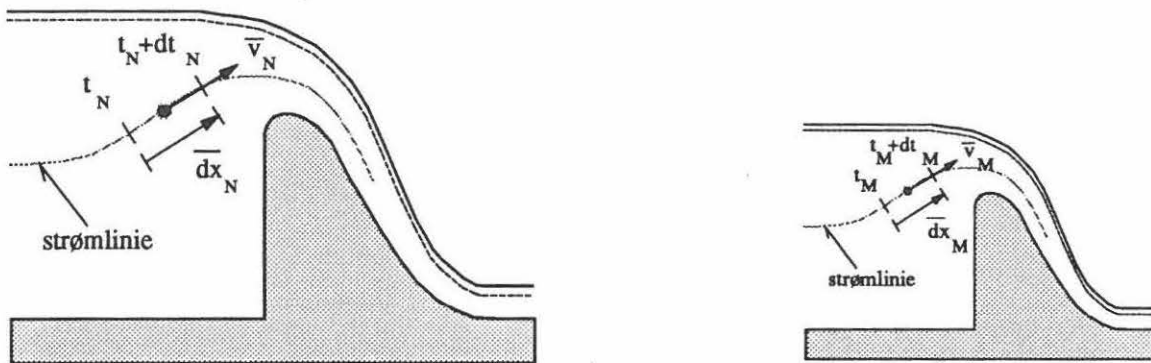
Kinematisk lighedannethed er tilstede, hvis alle ensbeliggende partikler til ensbeliggende tidspunkter har hastighedsvektorer, der opfylder ligningen

$$\bar{v}_N = \lambda_V \cdot \bar{v}_M \quad (4)$$

hvor forholdet mellem størrelsen af hastighederne

$$\lambda_V = \frac{v_N}{v_M} \quad (5)$$

betegnes *hastighedskalaen*. Alle ensbeliggende hastigheder skal således være parallelle og størrelsen skal skaleres med samme faktor. Se figur 2.



Figur 2. Hastighed af partikel i NATUR og i MODEL.

Det virker naturligt at kræve geometrisk lighedannethed for partiklernes flytninger i ensbeliggende tidsrum, se figur 2. Sammenkædes dette krav med kravet om kinematisk lighedannethed, bliver *tidsskalaen*,  $\lambda_t = t_N/t_M$ , dermed fastlagt.

Benyttes definitionen på partikelhastighed

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

på hastighederne i ligning (4) findes

$$\frac{dx_N}{dt_N} = \lambda_V \frac{dx_M}{dt_M} \quad (7)$$

Da geometrisk ligedannethed for flytningerne giver

$$\bar{dx}_N = \lambda_L \bar{dx}_M \quad (8)$$

som indsat i ligning (7) resulterer i

$$\frac{\lambda_L \bar{dx}_M}{dt_N} = \lambda_V \frac{\bar{dx}_M}{dt_M} \quad (9)$$

Denne ligning kan umiddelbart reduceres til

$$\frac{dt_N}{dt_M} = \frac{\lambda_L}{\lambda_V} \quad (10)$$

og dermed er *tidsskalaen* fastlagt som

$$\lambda_t = \frac{\lambda_L}{\lambda_V} \quad (11)$$

### Dynamisk ligedannethed

Dynamisk ligedannethed er tilstede, når alle de kræfter skales ens. I praksis betyder dette, at alle kræfter, der angriber ensbeliggende partikler til ensbeliggende tidspunkter, skal opfylde ligningen

$$\bar{K}_N = \lambda_K \bar{K}_M \quad (12)$$

hvor forholdet mellem størrelsen af kræfterne

$$\lambda_K = \frac{K_N}{K_M} \quad (13)$$

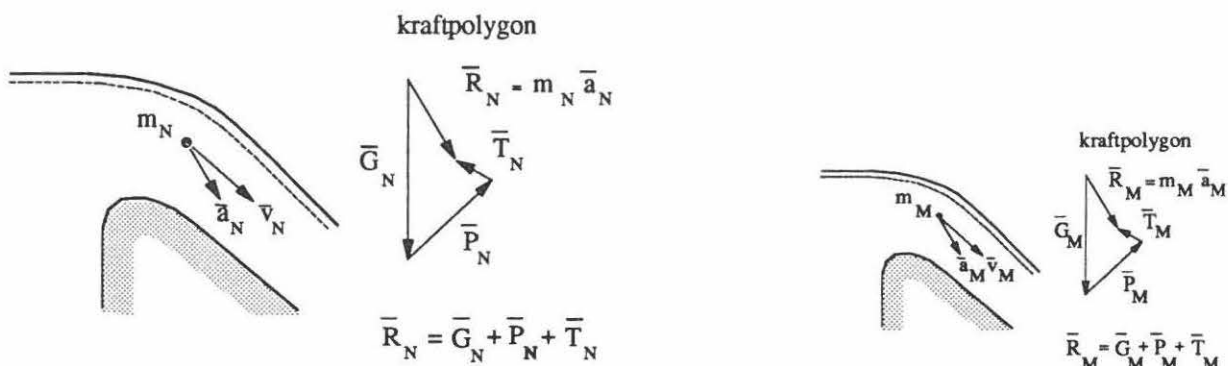
betegnes *kraftskalaen*. Alle ensbeliggende kræfter skal således være parallelle og deres størrelse skal skales med samme faktor. Se Figur 3. Kraftpolygonerne i natur og model er derfor også ligedannede.

I praksis er det etableringen af dynamisk ligedannethed, der volder problemer, fordi forskellige krafttyper ikke skales ens.

## Krafttyper

De væsentligste kræfter, der kan angribe en væskepartikel, er følgende:

- 1) tyngdekraft
- 2) forskydningskraft
- 3) trykkraft



Figur 3. Kræfter på partikel i NATUR og MODEL.

Tyngdekraften på et legeme med massen  $m$  findes som bekendt af

$$G = m g \quad (14)$$

hvor  $g$  er tyngdeaccelerationen.

Forskydningskraften i et snit i en strømning findes af

$$T = T_{\text{laminær}} + T_{\text{turbulent}} = A \rho v \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + A \rho v_{\text{turbulent}} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (15)$$

hvor  $A$  er fladens areal,  $\rho$  er væskens densitet,  $v$  er den kinematiske viskositet (en stofkonstant),  $v_1$  er hastigheden i strømningsretningen og  $x_2$  er retningen vinkelret derpå.  $v_{\text{turbulent}}$  er den såkaldte *hvirvelviskositet* (afhænger af strømningens karakter).

Tyngdekraft og forskydningskraft findes således af to forskellige naturlove.

Derimod dannes *trykkraften* af de to ovennævnte kræfter, og dens endelige størrelse afgøres af væskens mulighed for at strømme frit.

I en hvilende væske skabes trykket udelukkende af tyngdekraften. Da væsken er

forhindret i at bevæge sig, bliver trykkraften præcis lige med og modsat rettet tyngdekraften, jfr. Newton's 2. lov.

Har væsken derimod mulighed for at bevæge sig, kan der opstå acceleration. Da noget af trykkraften så benyttes til at accelerere væsken, må trykfordelingen afvige fra trykfordelingen i en hvilende væske.

Endvidere optræder der forskydningskræfter, når væsken bevæger sig. Trykfordelingen må derfor indstille sig således, at Newton's 2. lov opfyldes, dvs. summen af trykkraft, tyngdekraft og forskydningskraft skal være lig massen af væskepartiklen gange dennes acceleration, se Figur 3.

Man kan derfor sige, at naturloven til beregning af trykkraft er Newton's 2. lov, men det er væsentligt at huske på, at trykkraft skabes af tyngdekraft og forskydningskraft.

Endelig skal man bemærke, at det ikke er trykkets størrelse, men derimod forskelle i tryk, dvs. trykgradierter, der kan skabe bevægelse. Det er endda kun trykgradienternes afvigelse fra trykgradienterne i en hvilende væske, der får væsken sat til at flytte sig.

Selv om tyngdekraften derfor altid skaber betydelige tryk, behøver de tilhørende trykgradierter ikke at være væsentlige for strømningsforløbet.

Som en tommelfingerregel kan benyttes, at tyngdekraften altid skaber væsentlige trykgradierter, når en strømning har et frit vandspejl.

## Skalering af kræfter

I det følgende vil vi se på skalafaktoren for de 3 krafttyper og undersøge om det er muligt at opnå *samme skalering*, således at dynamisk ligedannethed opnås. Dette kan også udtrykkes som et krav om ligedannede kraftpolygoner, se Figur 3.

Endvidere konstateres, at opnås samme skalering for resultanten af kræfterne samt for 2 af de 3 øvrige kræfter, må den sidste kraft automatisk blive skaleret korrekt også.

### Kraftresultant

Skalaen for kraftresultanten,  $\lambda_{K,R}$ , viser sig at være fastlagt, når der kræves kinematisk ligedannethed, ligning (4) og overholdelse af tidsskalaen, ligning (11).

Newton's 2. lov (i det følgende betegnet N2) er som bekendt

$$\bar{R} = m \bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (16)$$

hvor  $R$  er den resulterende kraft på væskepartiklen,  $m$  er partiklens masse og  $a$  er accelerationen.

Opskrives N2 i natur og model, giver kravet om dynamisk ligedannethed, at

$$m_N \frac{d\bar{v}_N}{dt_N} = \lambda_{K,R} m_M \frac{d\bar{v}_M}{dt_M} \quad (17)$$

Indsættes her udtrykket for masserne af ligedannede volumener, som blev benyttet i ligning (3), findes

$$\rho_N c_X L_N^3 \frac{d\bar{v}_N}{dt_N} = \lambda_{K,R} \rho_M c_X L_M^3 \frac{d\bar{v}_M}{dt_M} \quad (18)$$

hvor  $c_X$ 'erne er ens pga. geometrisk ligedannethed. Indføres *densitetsskalaen*,  $\lambda_\rho = \rho_N/\rho_M$ , kan ligning (18) omskrives til

$$\lambda_\rho \rho_M \lambda_L^3 L_M^3 \frac{\lambda_V d\bar{v}_M}{\lambda_t dt_M} = \lambda_{K,R} \rho_M L_M^3 \frac{d\bar{v}_M}{dt_M} \quad (19)$$

eller

$$\lambda_\rho \lambda_L^3 \lambda_V \lambda_t^{-1} = \lambda_{K,R} \quad (20)$$

Indsættes ligningen for tidsskalaen, dvs.

$$\lambda_t^{-1} = \frac{\lambda_V}{\lambda_L} \quad (21)$$

ses endelig, at *skalaen for kraftresultanten* er

$$\lambda_{K,R} = \lambda_\rho \lambda_L^2 \lambda_V^2 \quad (22)$$

## Tyngdekraft

Tyngdekraft findes af ligningen

$$\bar{G} = m \bar{g} = \rho c L^3 \bar{g} \quad (23)$$

hvorfor skalaen for tyngdekraft bliver

$$\lambda_{K,G} = \frac{\rho_N c_X L_N^3 g_N}{\rho_M c_X L_M^3 g_M} = \frac{\rho_N L_N^3 g_N}{\rho_M L_M^3 g_M} \quad (24)$$

Indsættes heri skalaen for tyngdeacceleration,  $\lambda_g = g_N / g_M$ , findes skalaen for tyngdekraft således til



$$\lambda_{K,G} = \lambda_p \lambda_L^3 \lambda_g \quad (25)$$

### Forskydningskraft, laminært bidrag

Den laminære forskydningskraft findes af ligningen

$$T_{laminær} = A \cdot \tau_{laminær} = A \cdot \rho v \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = c_A L^2 \cdot \rho v \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (26)$$

Indsættes heri skalaen for kinematisk viskositet,  $\lambda_v = \nu_N / \nu_M$ , bliver skalaen for laminær forskydningskraft derfor

$$\lambda_{K,T_{lam}} = \frac{c_A L_N^2 \rho_N \nu_N (\partial v_1 / \partial x_2)_N}{c_A L_M^2 \rho_M \nu_M (\partial v_1 / \partial x_2)_M} = \lambda_L^2 \lambda_p \lambda_v \lambda_V \lambda_L^{-1} \quad (27)$$

eller

$$\lambda_{K,T_{lam}} = \lambda_p \lambda_v \lambda_V \lambda_L \quad (28)$$

### Forskydningskraft, turbulent bidrag

Denne forskydningskraft findes af ligningen

$$T_{turbulent} = A \cdot \tau_{turbulent} = A \cdot \rho v_{turbulent} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = c_A L^2 \cdot \rho v_{turbulent} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (29)$$

hvor  $v_{turbulent}$  betegnes *hvirvelviskositeten*. Denne er beklageligvis ikke en stofkonstant, da forskydningsspænding i en turbulent strømning er forårsaget af udveksling af bevægelsesmængde på tværs af strømningen. Jo større og mere intense hvirvler man har, desto større udveksling af bevægelsesmængde og dermed forskydningsspænding får man.

Prandtl viste ud fra ovenstående betragtninger, at hvirvelviskositeten kan beskrives med ligningen

$$\nu_{turbulent} = l^2 \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right| \quad (30)$$

hvor  $l$  kaldes *blandingslængden*. Denne er et mål for den afstand, som en væskepartikel kan bevæge sig, før den antager den omkringliggende væskes hastighed. Ikke uventet viser målinger, at  $l$  vokser med afstanden fra en fast væg. Tæt på væggen findes f.eks.

$$l = k x_2$$

hvor  $k$  er en universalkonstant, der ikke afhænger af strømningens skala.  
Udtrykket for turbulent forskydningskraft bliver derfor

$$T_{turbulent} = A \cdot \tau_{turbulent} = A \cdot \rho l^2 \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = c_A L^2 \rho l^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \quad (31)$$

Da geometrisk lighedannethed kræver, at blandingslængden også skaleres med længdeskalaen  $\lambda_L$ , findes skalaen for turbulent forskydningskraft af

$$\lambda_{K,T_{turb}} = \frac{c_A L_N^2 \rho_N l_N^2 (\partial v_1 / \partial x_2)_N^2}{c_A L_M^2 \rho_M l_M^2 (\partial v_1 / \partial x_2)_M^2} = \lambda_L^2 \lambda_\rho \lambda_L^2 \lambda_V^2 \lambda_L^{-2} \quad (32)$$

eller

$$\lambda_{K,T_{turb}} = \lambda_\rho \lambda_V^2 \lambda_L^2 \quad (33)$$

Denne kraftskala er således den samme som kraftskalaen for kraftresultanten. Man skal imidlertid bemærke, at dette kun gælder under forudsætning af geometrisk lighedannethed, hvilket bl. a. kræver, at evt. separationspunkter er beliggende ens i model og natur. Det er selvfølgelig også en forudsætning, at begge strømninger er turbulente. Sidstnævnte krav er ikke altid er lige nemt at opfylde i modellen.

## Etablering af fuld dynamisk lighedannethed.

Konsekvenserne af kravet til dynamisk lighedannethed, dvs. samme kraftskala for de forskellige typer kræfter, kan nu undersøges.

De tre kraftskalaer er ovenfor fundet til:

$$1) \text{ kraftresultant, turbulent forskydningskraft: } \lambda_{K,R} = \lambda_{K,T_{turb}} = \lambda_\rho \lambda_V^2 \lambda_L^2 \quad (34)$$

$$2) \text{ tyngdekraft: } \lambda_{K,G} = \lambda_\rho \lambda_L^3 \lambda_g \quad (35)$$

$$3) \text{ laminær forskydningskraft: } \lambda_{K,T_{lam}} = \lambda_\rho \lambda_V \lambda_V \lambda_L \quad (36)$$

Det ses umiddelbart, at fuld dynamisk lighedannethed opnås, hvis

$$\lambda_{K,R} = \lambda_{K,G} \quad \text{og} \quad \lambda_{K,R} = \lambda_{K,T_{lam}}$$

hvilket igen svarer til

$$\lambda_V = \lambda_L^{\frac{1}{2}} \lambda_g^{\frac{1}{2}} \quad \text{og} \quad \lambda_V = \lambda_v \lambda_L^{-1}$$

Da hastighedsskalaen skal være entydig, må man endelig kræve at

$$\lambda_v = \lambda_L^{\frac{3}{2}} \lambda_g^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

Dynamisk ligedannethed kan derfor etableres 100%, hvis man kan finde to væsker med viskositeter, der opfylder ovenstående ligning.

Da det er meget bekosteligt at etablere  $\lambda_g < 1$  (kan kun ske i en centrifuge), og da  $\lambda_L > 1$ , er man i praksis tvunget til at bruge en modelvæske, hvis viskositet er mindre end viskositeten af væsken i naturen.

Dette lader sig kun yderst sjældent gøre. Et af tilfældene er strømninger med olie. Viskositeten af olie er op til 1000 gange større end viskositeten af vand, så fuld dynamisk ligedannethed mellem natur og model kan opnås, hvis modelforsøget udføres med vand i målestokken

$$\lambda_L = \lambda_g^{\frac{1}{3}} \lambda_v^{\frac{2}{3}} \quad (38)$$

## Etablering af tilnærmet dynamisk ligedannethed

Selv om fuld dynamisk ligedannethed meget sjældent kan opnås, er det i mange tilfælde muligt at udføre modelforsøg, hvor dynamisk ligedannethed er tæt på at være etableret.

Der kræves blot, at enten tyngdekraften eller den laminære forskydningskraft er dominerende ved dannelsen af trykkraften på en væskepartikel. Da fuld dynamisk ligedannethed ikke kan etableres, bliver der uundgåeligt introduceret fejl, når vi skalerer modelforsøgets kræfter med samme skala. Disse fejl kaldes normalt *skalaeffekt*.

### Froude's modellov

I de tilfælde, hvor tyngdekraften er meget dominerende i forhold til den laminære forskydningskraft, opnås tilnærmet dynamisk ligedannethed ved at kræve samme kraftskala for tyngdekraft og den resulterende kraft, dvs.

$$\lambda_{K,R} = \lambda_{K,G} \quad (39)$$

eller

$$\lambda_V = \lambda_L^{\frac{1}{2}} \lambda_g^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

Indføres udtrykkene for de respektive skalaer findes

$$\frac{V_N}{\sqrt{g_N L_N}} = \frac{V_M}{\sqrt{g_M L_M}} \quad (41)$$

Herefter defineres *Froude's tal* som

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g L}} \quad (42)$$

hvor  $V$  er en karakteristisk hastighed,  $g$  er tyngdeaccelerationen og  $L$  er en karakteristisk længde.

Det ses så, at betingelsen for dynamisk lighedannethed kan udtrykkes som lighed mellem Froude's tal i naturen og i modellen, dvs.

$$Fr_N = Fr_M \quad (43)$$

Heraf navnet *Froude's modellov*.

Antages  $g_N = g_M$ , kan betingelsen for dynamisk lighedannethed udtrykkes som

$$\lambda_V = \lambda_L^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

Benyttes udtrykket for *tidsskala* findes umiddelbart

$$\lambda_t = \frac{\lambda_L}{\lambda_V} = \frac{\lambda_L}{\frac{\lambda_L^{\frac{1}{2}}}{\lambda_L^{\frac{1}{2}}}} = \lambda_L^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

Skalaen for *kraft* findes til

$$\lambda_K = \lambda_\rho \lambda_V^2 \lambda_L^2 = \lambda_\rho (\lambda_L^{\frac{1}{2}})^2 \lambda_L^2 = \lambda_\rho \lambda_L^3 \quad (46)$$

og skalaen for *volumenstrøm* bliver

$$\lambda_Q = \lambda_L^3 \lambda_t^{-1} = \lambda_L^{\frac{5}{2}} \quad (47)$$

Når tyngdekraften er den dominerende kraft, er alle skalaer derfor fastlagt, såsnart længdeskalaen er valgt.

### Eksempel 1

I alle kloaksystemer indbygges overløbsbygværker. Som navnet antyder, løber vandet ud over en kant, når volumenstrømmen og dermed vandstanden bliver tilstrækkelig stor. Vandet fra overløbsbygværket ledes direkte til recipienten, og på denne måde forhindres for store volumenstrømme i den nedenfor liggende del af kloaksystemet. Filosofien er enkel: hellere forurening af recipienten end optrængen af spildevand i husenes kældre. En dæmning kan betragtes som et simpelt overløbsbygværk, og af figur 1 ses, at overløbsbygværket træder i funktion, når  $h > w$ .

Da man normalt ikke kan beregne volumenstrømmen som funktion af vandstanden for et givet overløbsbygværk, må der udføres modelforsøg. Der er oplagt tale om en strømning, hvor trykfordelingen er kraftigt påvirket af tyngdekraften, hvorfor dynamisk lighedannethed opnås ved opfyldelse af Froude's modellov.

#### Problem:

Et givet overløbsbygværk skal kunne klare en volumenstrøm på  $1.5 \text{ m}^3/\text{s}$  ved maksimal vandstand. Der bygges en model af bygværket i skala 1:5, og et modelforsøg skal udføres for at sikre, at dette krav kan overholdes med den givne udformning af bygværket.

Hvilken volumenstrøm skal man anvende i modelforsøget svarende til maksimal vandstand? Hvis en hastighed i et givet punkt måles til  $1.2 \text{ m/s}$  i modelforsøget, hvor stor vil hastigheden så være i det tilsvarende punkt i prototypen?

#### Løsning:

Længdeskalaen er  $\lambda_L = 5$ , og modelforsøget udføres med  $\lambda_g = 1$ . Opfyldelsen af Froude's modellov:

$$\frac{V_N}{\sqrt{g_N L_N}} = \frac{V_M}{\sqrt{g_M L_M}}$$

er derfor ensbetydende med

$$\lambda_V = \lambda_L^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = 2.24$$

Skalaen for volumenstrøm bliver

$$\lambda_Q = \lambda_L^3 \lambda_t^{-1} = \lambda_L^{\frac{5}{2}} = 5^{\frac{5}{2}} = 55.9$$

I modelforsøget skal man derfor benytte volumenstrømmen

$$Q_M = \frac{Q_N}{\lambda_Q} = \frac{1.5}{55.9} = 0.0268 \text{ m}^3/\text{s} = 26.8 \text{ l/s}$$

og hastigheden i naturen bliver

$$V_N = V_M \lambda_L^{\frac{1}{2}} = 1.2 \cdot 2.24 = 2.68 \text{ m/s}$$

### Reynolds' modellov

For strømninger uden tilstedeværelse af en fri overflade betyder tyngdekraften intet for de trykforskelle, der skabes afstrømningen. Virkningen af tyngdekraften er alene opdrift, som kan beregnes umiddelbart.

Tilnærmet dynamisk lighedannethed kan derfor etableres ved at opfylde kravet om ens kraftskala for kraftresultanten og for de laminære forskydningskraft. Det er tidligere vist, at dette kan udtrykkes som

$$\lambda_V = \lambda_v \lambda_L^{-1} \quad (48)$$

Indføres her definitionerne for de respektive længdeskalaer, kan denne ligning skrives som

$$\frac{V_N L_N}{\nu_N} = \frac{V_M L_M}{\nu_M} \quad (49)$$

Herefter defineres *Reynolds' tal* som

$$Re = \frac{V L}{\nu} \quad (50)$$

hvor  $V$  er en karakteristisk hastighed,  $L$  er en karakteristisk længde og  $\nu$  er den kinematiske viskositet.

Indføres Reynolds' tal i ligning (49) findes

$$Re_N = Re_M \quad (51)$$

og dynamisk lighedannethed opnås i dette tilfælde ved at kræve lighed mellem Reynolds' tal i model og natur. Dette har givet anledning til betegnelsen *Reynolds' modellov*.

Udføres modelforsøget med samme væske som i naturen, er  $\lambda_v=1$ , og kravet om dynamisk lighedannethed bliver i dette tilfælde

$$\lambda_v = \lambda_L^{-1} \quad (52)$$

Benyttes udtrykket for *tidsskala* findes umiddelbart

$$\lambda_t = \frac{\lambda_L}{\lambda_v} = \frac{\lambda_L}{\lambda_L^{-1}} = \lambda_L^2 \quad (53)$$

Skalaen for *kraft* findes til

$$\lambda_K = \lambda_p \lambda_v^2 \lambda_L^2 = \lambda_p (\lambda_L^{-1})^2 \lambda_L^2 = \lambda_p \quad (54)$$

Benyttes samme væske, dvs.  $\lambda_p = 1$ , vil man derfor måle samme kraft i model og natur, hvilket godt kan give praktiske problemer med styrken af modellen. De store kræfter i modellen skyldes selvfølgelig de meget store hastigheder, der skal benyttes i modellen for at opnå det korrekte Reynolds' tal.

Endelig findes skalaen for *volumenstrøm* af

$$\lambda_Q = \lambda_L^3 \lambda_t^{-1} = \lambda_L^3 \lambda_L^{-2} = \lambda_L \quad (55)$$

## Eksempel 2

### Problem:

Tryktabet pr. m i et vandret, fuldtløbende rør ønskes fundet. Den indre rørdiameter er 2.00 m, vægtykkeligheden 10 mm og volumenstrømmen er 3 m<sup>3</sup>/s, dvs. middelhastigheden i et tværsnit er 0.955 m/s. Hvilken volumenstrøm og middelhastighed skal man benytte i et modelforsøg i skala 1:10, når vand benyttes i både model og natur og fuld dynamisk lighedannethed ønskes?

### Løsning:

I dette tilfælde er der ingen frie overflader, så dynamisk lighedannethed opnås ved opfyldelse af Reynolds' modellov

$$\frac{V_N L_N}{v_N} = \frac{V_M L_M}{v_M}$$

Ens væsker giver  $\lambda_v = 1$ , hvorfor Reynolds' modellov er opfyldt for

$$\lambda_v = \lambda_L^{-1}$$

Middelhastigheden i modellen skal derfor være

$$V_M = \frac{V_N}{\lambda_v} = V_N \lambda_L = 0.955 \cdot 10 = 9.55 \text{ m/s}$$

og volumenstrømmen i modellen bliver

$$Q_M = V_M A_M = V_M \frac{\pi}{4} D_M^2 = 9.55 \frac{\pi}{4} 0.2^2 = 0.30 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Sidstnævnte resultat ses at være i overensstemmelse med ligning (55).



# **DIMENSIONSANALYSE**

**Michael Brorsen**

**August 1993**  
**Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning**  
**Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik**  
**AUC, Sohngaardsholmsvej 57 , 9000 Aalborg**

## Indholdsfortegnelse:

<b>Indledning</b> .....	1
<b>Dimensionsbegrebet</b> .....	1
<b>Den trinvis metode</b> .....	3
Eksempel 1: Faldhastighed af et legeme .....	4
Eksempel 2: Tryktab i en ensformig rørstrømning .....	6

# Dimensionsanalyse

## Indledning

Løsningen af hydrauliske problemer kan kun sjældent baseres på en eksakt analytisk løsning af strømningss ligningerne.

Selv om der i de seneste årtier er kommet stærkt forbedrede muligheder for en numerisk løsning af strømningss ligningerne på computere, må man alligevel forbavsende ofte også inddrage resultater fra fysiske modelforsøg ved løsningen af et problem.

For at kunne analysere resultaterne fra fysiske modelforsøg effektivt, er det nødvendigt at anvende *dimensionsanalyse*, hvor man systematisk sammenkobler problemets indgående størrelser til et færre antal dimensionsløse størrelser.

Herved kan antallet af nødvendige forsøg reduceres og bearbejdningen af forsøgsresultaterne lettes væsentligt.

Det fremgår forhåbentligt af det følgende, at der er tale om et generelt værktøj, som kan anvendes, så snart man har indkredset de væsentlige fysiske størrelser i problemet.

## Dimensionsbegrebet

Dimension er en egenskab der karakteriserer en given fysisk størrelse. Som eksempler på forskellige dimensioner kan nævnes masse, længde og tid.

En fysisk størrelse måles ved sammenligning med den valgte *enhed* for den pågældende dimension, og i SI-systemet benyttes grundenhederne *kg*, *m* og *sek*.

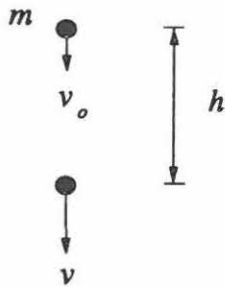
I det følgende betegnes dimensionen af henholdsvis masse, længde og tid med *M*, *L* og *T*.

Af disse 3 grundlæggende dimensioner kan dimensionen af andre størrelser i den mekaniske fysik udledes. F. eks. findes dimensionen af kraft ved hjælp af Newtons 2. lov som  $F = M L T^{-2}$ .

Af dette udtryk ses, at kun tre af de indgående dimensioner er uafhængige, idet kraftdimensionen udtrykkes ved de 3 grunddimensioner.

### Eksempel: Faldhastighed af et legeme

I dette eksempel betragtes et problem, der først løses ved anvendelse af de fysiske love. Senere vil det blive undersøgt, hvor langt man kan komme udelukkende ved anvendelse af dimensionsanalyse.



Et legeme med massen  $m$  falder frit under påvirkning af tyngdeaccelerationen  $g$ . Idet legemets udgangshastighed betegnes  $v_o$ , ønskes legemets hastighed  $v$  bestemt efter et fald på  $h$ . Der ses bort fra luftmodstanden.

I dette tilfælde siger den fysiske lov, at tilvæksten i legemets kinetiske energi er lig med de ydre kræfters arbejde, dvs. tyngdens arbejde i dette tilfælde.

Figur 1 Definitionsskitse

$$\Delta E_{kin} = A_{ydre} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 = mgh$$

eller

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$$

der også kan skrives som

$$\frac{v}{v_o} = \sqrt{1 + 2 \frac{gh}{v_o^2}} \quad (2)$$

Vi har med disse beregninger fået reduceret sammenhængen mellem de oprindelige 5 størrelser

$$v = f(m, h, v_o, g) \quad (3)$$

til en sammenhæng mellem de 2 størrelseskombinationer  $v/v_0$  og  $gh/v_0^2$ , hvor funktionen  $f$  er kendt.

Herefter går vi igang med dimensionsbetragtninger.

I udtrykket for faldhastighed, ligning (1):

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

$$M(LT^{-1})^2 \quad M(LT^{-1})^2 \quad M(LT^{-2})L \quad (4)$$

ses, at alle led i ligningen har samme dimension, nemlig  $ML^2T^{-2}$ . Det må nødvendigvis være sådan, hvis størrelser på entydig måde skal kunne sammenlignes, lægges sammen, trækkes fra hinanden eller sættes lig hinanden. Populært sagt er der jo ikke nogen mening at undersøge om et tordenskrald eller Rundetårn er højest!

Alligevel ser man ofte empiriske formler, der ikke er dimensionskorrekte, hvilket kan resultere i meningsløse resultater ved anvendelse af forkerte enheder, når formlerne benyttes.

Alle dimensionskorrekte ligninger har endvidere den egenskab, at de er opfyldt uanset hvilke enheder, man vælger at måle de indgående størrelser med. Dimensionskorrekte ligninger gælder derfor uanset om f. eks. længder måles i  $m$  eller  $cm$ .

Dette er ikke tilfældet for dimensionsforkerte ligninger. Vi kan i denne forbindelse forestille os, at højresiden i ligning (4) fejlagtigt var fundet til  $mg$  samt, at ligningen i en given situation tilfældigvis er opfyldt, forudsat den anvendte enhed for længder er  $m$ .

Benyttes i stedet enheden  $cm$  vil ligningens venstreside vokse med en faktor  $100 \cdot 100 = 10000$ , medens højresiden kun vokser med en faktor 100.

Hermed er ligningen ikke længere opfyldt, selv om det er de samme fysiske størrelser, der indgår. Man må derfor konkludere, at en sådan ligning er ukorrekt bygget op!

I praksis haves flere metoder, hvormed man kan udnytte kravet om dimensionskorrekte sammenhænge til at omskrive en dimensionskorrekt ligning til en ligning, hvor kun dimensionsløse størrelser (grupper af størrelser) indgår, og hvor antallet af uafhængige dimensionsløse størrelser er op til 3 mindre end antallet af de oprindelige størrelser.

Den mest berømte metode er baseret på det såkaldte Buckingham's  $\pi$ -teorem. Denne metode er dog ret svært tilgængelig.

Istedet vil vi her betragte den lettere forståelige metode, hvor man trinvis eliminerer dimensionerne i det principielle funktionsudtryk, der beskriver problemet.

## Den trinvis metode

Man indleder altid en dimensionsanalyse med at betragte fysikken i problemet, således at de væsentlige størrelser i problemet indkredses.

Overses en væsentlige størrelse, vil analysen føre til et forkert resultat.

Medtages derimod en uvæsentlig størrelse, sker der ingen direkte skade ved det. Dog vil resultatet af analysen blive unødigt kompliceret, hvilket først erkendes ved udførelsen af de forsøg, hvor den uvæsentlige størrelse varieres.

Herefter begynder man trinvis at eliminere de tre grunddimensioner fra ligningen ved at gruppere de oprindelige størrelser i dimensionsløse størrelser.

Her skal man bemærke, at en ligning kun kan være dimensionskorrekt (og dermed opfyldt uanset valg af enheder), hvis en bestemt dimension indgår i mindst 2 af størrelserne.

Indgår en dimension således kun i en enkelt størrelse, må denne størrelse derfor udgå af ligningen.

Analysen er færdig, når det oprindelige funktionsudtryk er omskrevet til et udtryk, hvor kun dimensionsløse variable indgår.

### Eksempel 1: Faldhastighed af et legeme

Faldhastigheden af legemet må formodes at afhænge af legemets masse  $m$ , start-hastigheden  $v_0$ , tyngdeaccelerationen  $g$  samt faldhøjden  $h$ . Se figur 1.

Dette kan opskrives som vist nedenfor, hvor  $f_1$  er en foreløbig ukendt funktion

$$\begin{array}{ccccccc} v & = & f_1 & ( & m & , & h & , & v_0 & , & g & ) \\ \text{LT}^{-1} & & & & \text{M} & \text{L} & \text{LT}^{-1} & \text{LT}^{-2} & & & \end{array} \quad (5)$$

Betragtes ligning (5) ses imidlertid, at massedimensionen kun indgår i massen  $m$ , hvorfor denne må udgå af ligningen som uafhængig variabel. Ligningen er derfor reduceret til

$$\begin{array}{ccccccc} v & = & f_2 & ( & h & , & v_0 & , & g & ) \\ \text{LT}^{-1} & & & & \text{L} & \text{LT}^{-1} & \text{LT}^{-2} & & & \end{array}$$

hvor  $f_2$  er en ny ukendt funktion. I det følgende øges indeks til de ukendte funktioner med 1, hver gang en omskrivning af ligningen foretages.

I ligning (5) kan tidsdimensionen fjernes ved at dividere venstresiden med start-hastigheden  $v_0$  og tyngdeaccelerationen  $g$  divideres med  $v_0^2$ .

Herved fremkommer ligningen

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{v_0} f_3 \left( h, v_0, \frac{g}{v_0^2} \right) = f_4 \left( h, v_0, \frac{g}{v_0^2} \right) \quad (6)$$

$L \quad LT^{-1} \quad L^{-1}$

Nu indgår tidsdimensionen kun i 1 uafhængig variabel, nemlig  $v_0$ , hvorfor denne størrelse må udgå. Herved er ligning (5) blevet omskrevet til

$$\frac{v}{v_0} = f_5 \left( h, \frac{g}{v_0^2} \right) \quad (7)$$

$L \quad L^{-1}$

Til sidst fjernes længdedimensionen ved at multiplicere  $g/v_0^2$  med faldhøjden  $h$

$$\frac{v}{v_0} = f_6 \left( h, \frac{gh}{v_0^2} \right) \quad (8)$$

$L$

Nu må faldhøjden  $h$  udgå som en uafhængig variabel, da længdedimensionen kun indgår i denne størrelse.

Hermed har dimensionsanalysen resulteret i udtrykket

$$\frac{v}{v_0} = f_7 \left( \frac{gh}{v_0^2} \right) \quad (9)$$

Funktionen  $f_7$  kan ikke bestemmes ved dimensionsanalysen.

I visse tilfælde kan funktionen fastlægges ved anvendelse af de fysiske love ellers må forsøg udføres. Sammenlignes (9) og (2), findes i dette tilfælde, at

$$f_7 \left( \frac{gh}{v_0^2} \right) = \sqrt{1 + 2 \frac{gh}{v_0^2}}$$

Er forsøg nødvendige, ses dog, at  $f_7$  kun afhænger af 1 dimensionsløs variabel, hvorfor forsøgsarbejdet er til at overse. Man skal også bemærke, at der ikke er nogen bånd på den måde, hvormed man opnår variation af den dimensionsløse variable.

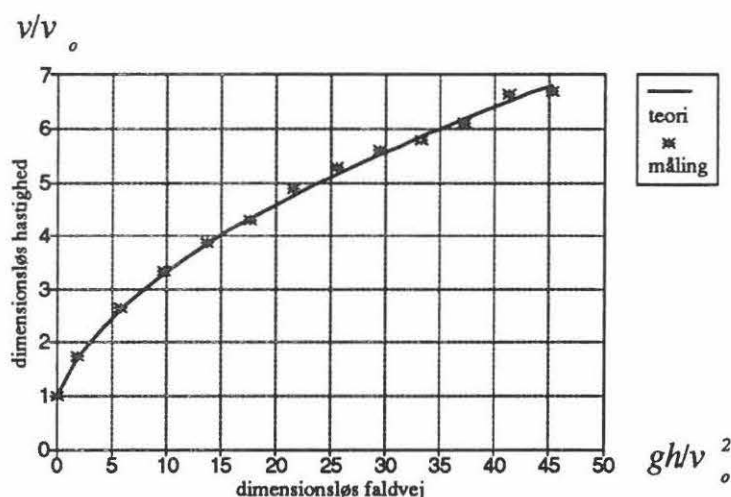
I dette tilfælde kan man derfor nøjes med at benytte et enkelt legeme (dvs. massen holdes konstant) med en given starthastighed  $v_0$  og så blot måle en række sammenhørende værdier af  $v$  og  $h$ .

Resultaterne afbildes i et koordinatsystem med  $gh/v_0^2$  som x-koordinat og  $v/v_0$  som y-koordinat. Funktionen  $f_6$  kan således bestemmes grafisk, hvis blot en enkelt forsøgsserie udføres. Se figur 2, hvor både resultatet fra en forsøgsserie og teoretiske

værdier er optegnet.

I praksis kendes den teoretiske kurve ikke, når der benyttes dimensionsanalyse. Man må derfor tilpasse en kurve, der bedst muligt beskriver forsøgsresultaterne. Som regel findes også et matematisk udtryk, der beskriver denne kurve ('fitning'). Man har herved fundet et tilnærmet udtryk for funktionen i den dimensionsløse ligning.

Havde man derimod anvendt det oprindelige udtryk med 4 variable i funktionsudtryk ket, havde 4 forsøgsserier været nødvendige.



Figur 2 Sammenhæng mellem dimensionsløs faldvej og dimensionsløs hastighed.

Antages at hver forsøgsserie kræver 10 forskellige værdier af hver variabel, havde man skulle foretage  $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$  flere målinger, hvis det oprindelige udtryk havde været benyttet. Endvidere ville nogle af forsøgene med variation af tyngdeaccelerationen  $g$  ikke være udpræget nemme at udføre!

## Eksempel 2: Tryktab i en ensformig rørstrømning.

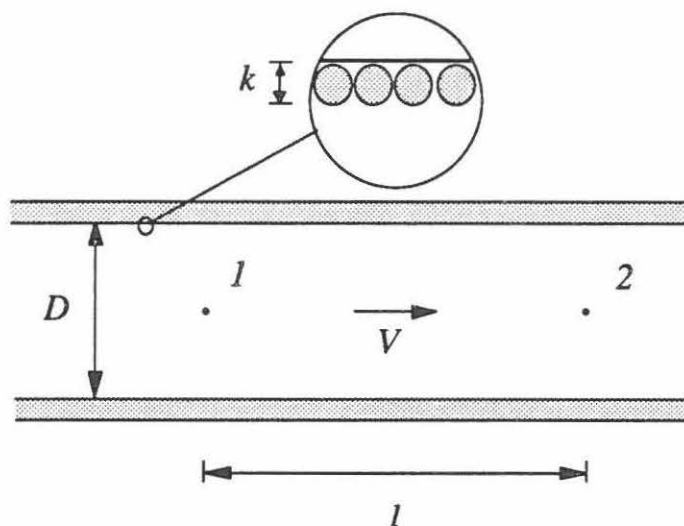
Tryktab i rørstrømninger kan kun beregnes ud fra de grundlæggende strømningsligninger, når der er tale om *laminær* strømning. Dette er særdeles uheldigt, da vi normalt altid har *turbulent* strømning i praksis.

Vi ønsker derfor i dette eksempel at benytte dimensionsanalysen til at opstille det simplest mulige generelle udtryk for tryktabet mellem to punkter i rørstrømningen. Udtrykket skal kunne varetage både laminær og turbulent strømning.

Vi vil endvidere antage, at indersiden af røret har en veldefineret *ruhed*. Den



tænkes her etableret ved påklæbning af sandkorn med ens diameter. Tryktabet ønskes fundet mellem to punkter placeret i røraksen af et cirkulært, vandretliggende rør. Se Figur 3.



Figur 3 Skitse af vandretliggende rør med sandkorn klæbet på indersiden

Følgende betegnelser anvendes:

- $l$  : afstanden mellem de to punkter (L).
- $D$  : indvendig rørdiameter (L).
- $V$  : middelhastigheden over et tværsnit i røret ( $LT^{-2}$ ).
- $\rho$  : densiteten af vædsken ( $ML^{-3}$ ).
- $\nu$  : kinematisk viskositet af væsken ( $L^2T^{-1}$ ).
- $k$  : diameter af påklæbede sandkorn (L).
- $\Delta p$  : tryktab over længden  $l$  ( $ML^{-1}T^{-2}$ ).

Størrelsernes dimension er angivet i parentes. Dimensionen af tryktabet er fundet ved benyttelse af definitionen på tryk, nemlig kraft/areal, og dimensionen af kraft er som tidligere nævnt  $MLT^{-2}$ . Dimensionen af viskositeten er fundet ud fra Newtons formel gældende for laminær strømning:  $\tau = \rho \nu \cdot \partial u / \partial y$ , hvorfor dimensionen af  $\nu$  findes som:

$$[\nu] = \frac{[\tau]}{[\rho] \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3} \frac{LT^{-1}}{L}} = L^2 T^{-1}$$

### Fysiske overvejelser:

Tryktabet må formodes at vokse, når middelhastigheden og ruheden i røret vokser.

Betragtes væskelegemet mellem to snit, vil en øget forskydningskraft mellem væg og væske øge modstanden mod strømmingen og dermed også resultere i et større tryktab. Væskens densitet og viskositet må derfor inddrages.

Endelig må tryktabet også afhænge af rørdiameteren, da vi tidligere har set at omslaget mellem laminær og turbulent strømning sker ved et tilstrækkeligt stort Reynolds' tal, her defineret som  $Re = VD/\nu$ .

Derimod kan tyngdekraften ikke spille nogen rolle, da røret er vandretliggende.

Resultatet af disse overvejelser giver følgende principielle udtryk for tryktabet:

$$\Delta p = f_1 ( V, l, k, D, \rho, \nu )$$
$$ML^{-1}T^{-2} \quad LT^{-1} L \quad L \quad L \quad ML^{-3} L^2T^{-1}$$

### Elimination af dimensioner:

Massedimensionen elimineres først ved hjælp af  $\rho$

$$\frac{\Delta p}{\rho} = f_2 ( V, l, k, D, \nu )$$
$$L^2T^{-2} \quad LT^{-1} L \quad L \quad L \quad L^2T^{-1}$$

Dernæst gøres venstresiden dimensionsløs ved division med  $V^2$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_3 ( V, l, k, D, \nu )$$
$$LT^{-1} L \quad L \quad L \quad L^2T^{-1}$$

hvorpå tidsdimensionen fjernes ved hjælp af  $\nu$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_4 ( \frac{V}{\nu}, l, k, D )$$
$$L^{-1} L \quad L \quad L$$

og til sidst elimineres længdedimensionen med  $D$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_5 ( \frac{VD}{\nu}, \frac{l}{D}, \frac{k}{D} )$$

Nu kan man ikke komme længere med dimensionsanalyse alene. Til gengæld kan vi udnytte, at der er tale om *ensformig* strømning. Det bevirker nemlig, at øges  $l$  til f.eks. det dobbelte, så må også  $\Delta p$  øges til det dobbelte.

Denne proportionalitet kan udnyttes til at omskrive ovenstående ligning til den dimensionsløse ligning

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{l}{D} \cdot f_6 \left( \frac{VD}{\nu}, \frac{k}{D} \right)$$

Det ses, at den ukendte funktion  $f_6$  kun afhænger af Reynolds' tal samt den dimensionsløse ruhed  $k/D$ , hvorfor funktionen i praksis relativt nemt kan fastlægges ved forsøg.

Sådanne systematisk gennemførte forsøg blev udført af tyskeren Nikuradse for ca. 60 år siden, og forsøgene blev et gennembrud for udarbejdelsen af en rationel metode til beregning af tryktab og dermed energitab i rørstrømninger.

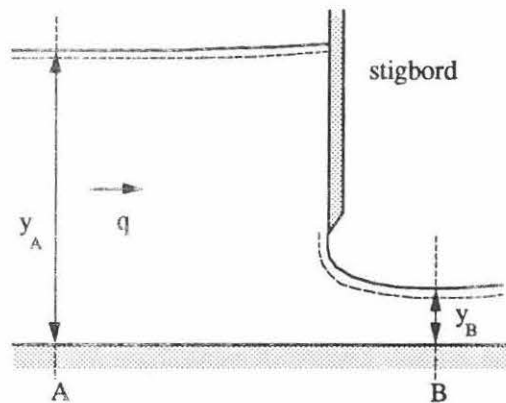
Omsætningen af forsøgsresultaterne til brugbare formler ( dvs. tilpasning af matematiske funktionsudtryk til forsøgsresultaterne, også kaldet 'fitning') er beskrevet i f.eks. 'Hydraulik for Bygningsingeniører' af Flemming Bo Pedersen, hvortil der henvises.

## ØVELSESOPGAVER I DIMENSIONSANALYSE

Strømningen under et stigbord betragtes, se figur 1.

Vandføringen pr. m bredde betegnes  $q$ , væskens densitet  $\rho$  og tyngdeaccelerationen betegnes  $g$ .

Væsken antages at være ideal.



Figur 1. Definitionsskitse.

### Spørgsmål 1

Hvilke størrelser må  $q$  formodes at afhænge af?

### Spørgsmål 2

Find ved dimensionsanalyse et udtryk for  $q$ .

### Spørgsmål 3

Nu antages, at  $y_B = k \cdot y_A$ , hvor  $k$  er en konstant. Vis, at det i spørgsmål 2 fundne udtryk for  $q$  nu er bestemt på nær en ukendt konstant,  $K_1$ .

### Spørgsmål 4

Bestem konstanten  $K_1$  i udtrykket for  $q$ , når  $y_B = 1/5 \cdot y_A$ , dvs. forholdende er som i Øvelsesopgave 202.